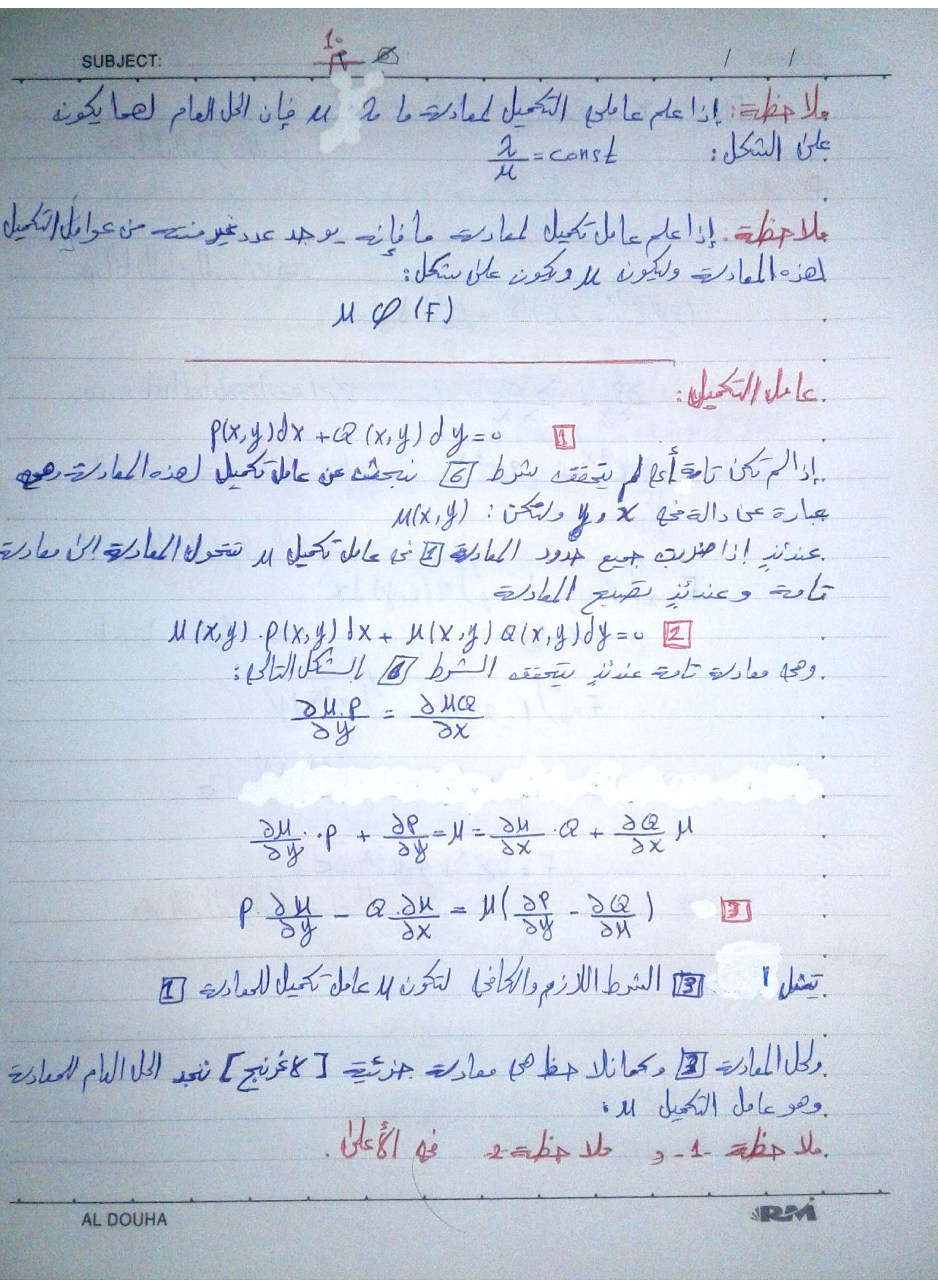


ملاحظة: إذا علم عاملي التكميل لمعادلة ما λ و μ فإن الحل العام لهما يكون على الشكل:

$$\frac{\lambda}{\mu} = const$$

ملاحظة: إذا علم عامل تكميل لمعادلة ما فإنه يوجد عدد غير منته من عوامل التكميل لهذه المعادلة ولتكن μ وتكون على شكل:

$$\mu\,\varphi(F)$$

عامل التكميل:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad [1]$$

إذا لم تكن تامة أي لم يتحقق شرط [6] نبحث عن عامل تكميل لهذه المعادلة وهو عبارة عن دالة في x و y ونكتب: $\mu(x,y)$

عندئذٍ إذا ضربت جميع حدود المعادلة [1] في عامل تكميل μ تتحول المعادلة إلى معادلة تامة وعندئذٍ تصبح المعادلة

$$\mu(x,y)\cdot P(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0 \quad [2]$$

وهي معادلة تامة عندئذٍ يتحقق الشرط [6] بالشكل التالي:

$$\frac{\partial \mu P}{\partial y} = \frac{\partial \mu Q}{\partial x}$$

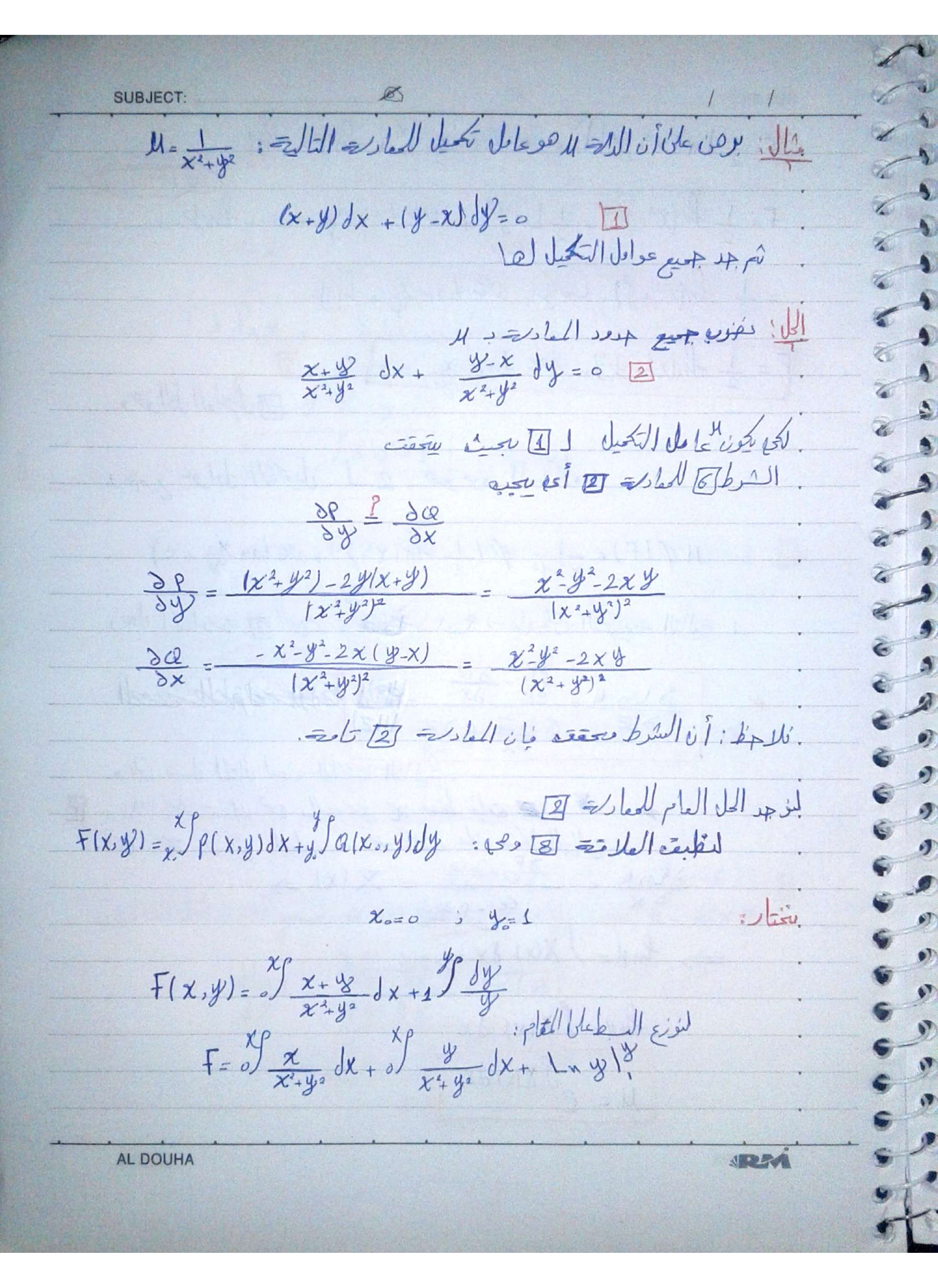
$$\frac{\partial \mu}{\partial y}\cdot P + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\mu = \frac{\partial \mu}{\partial x}\cdot Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\mu$$

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \quad [3]$$

تمثل [3] الشرط اللازم والكافي لتكون μ عامل تكميل للمعادلة [1]

ولحل المعادلة [3] وكما نلاحظ هي معادلة جزئية [لاغرنج] نجد الحل العام للمعادلة وهو عامل التكميل μ:

ملاحظة -1- و ملاحظة -2- في الأعلى.



مثال: برهن على أن الدالة μ هو عامل تكميل للمعادلة التالية: $\mu = \frac{1}{x^2+y^2}$

$$(x+y)\,dx + (y-x)\,dy = 0 \quad \boxed{1}$$

ثم جد جميع عوامل التكميل لها

الحل: نضرب جميع حدود المعادلة بـ μ

$$\frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}\,dy = 0 \quad \boxed{2}$$

لكي يكون μ عامل التكميل لـ $\boxed{1}$ بحيث يتحقق الشرط $\boxed{6}$ للمعادلة $\boxed{2}$ أي يجب

$$\frac{\partial P}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2) - 2y(x+y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-x^2-y^2-2x(y-x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

نلاحظ: أن الشرط متحقق فإن المعادلة $\boxed{2}$ تامة.

لنوجد الحل العام للمعادلة $\boxed{2}$

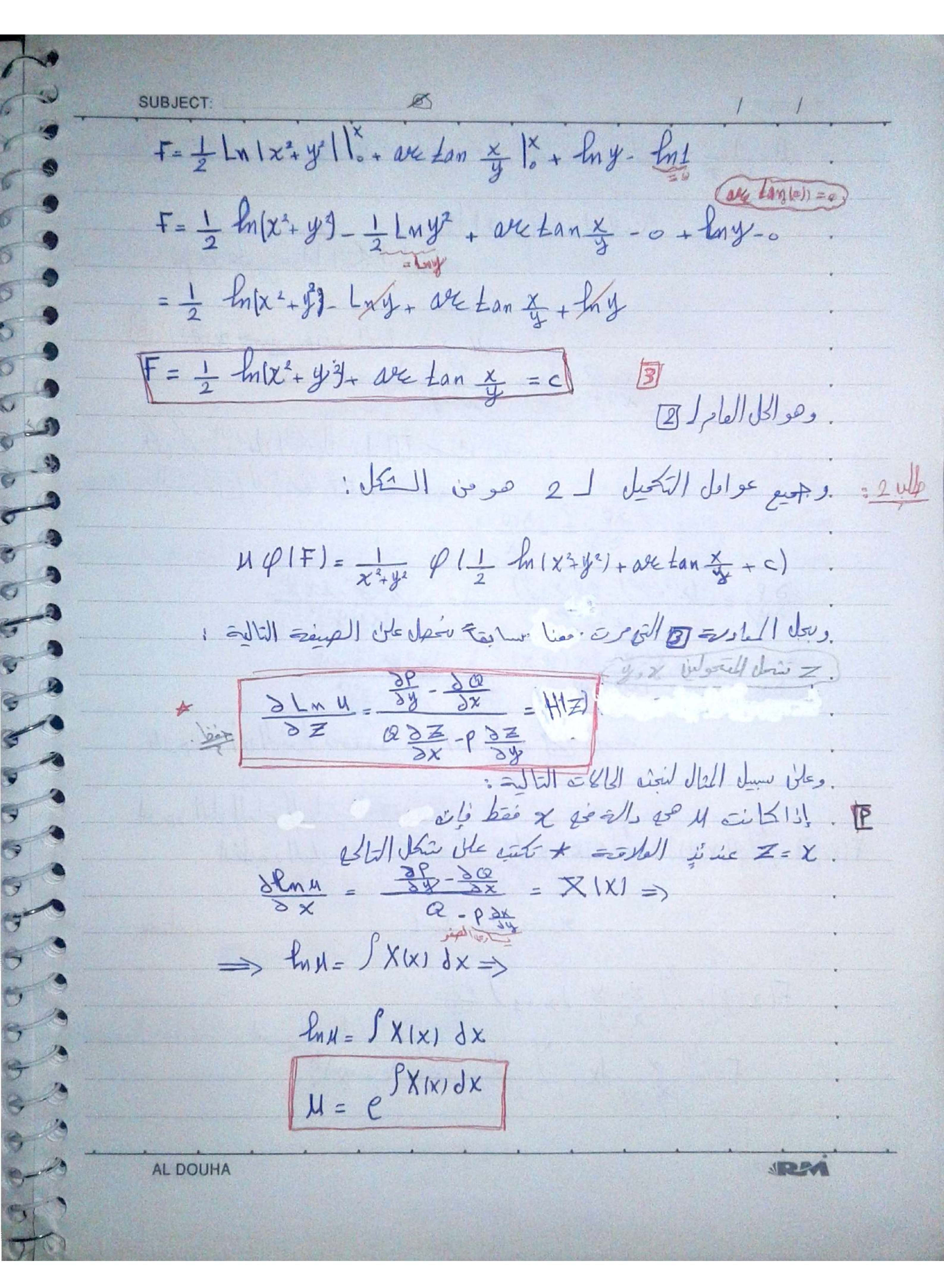
لنطبق العلاقة $\boxed{8}$ وهي: $F(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\,dy$

نختار: $x_0 = 0 \; ; \; y_0 = 1$

$$F(x,y) = \int_0^x \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \int_1^y \frac{dy}{y}$$

لنوزع البسط على المقام:

$$F = \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \int_0^x \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \ln y \Big|_1^y$$



SUBJECT:

$$F = \frac{1}{2} \ln|x^2+y^2| \Big|_0^x + \arctan\frac{x}{y} \Big|_0^x + \ln y - \underbrace{\ln 1}_{=0}$$

($\arctan(0) = 0$)

$$F = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \underbrace{\frac{1}{2}\ln y^2}_{=\ln y} + \arctan\frac{x}{y} - 0 + \ln y - 0$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \ln y + \arctan\frac{x}{y} + \ln y$$

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{x}{y} = c}$$ 3

وهو الحل العام لـ 2

طلب 2 : وجميع عوامل التكميل لـ 2 هو من الشكل :

$$\mu\varphi(F) = \frac{1}{x^2+y^2}\,\varphi\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \arctan\frac{x}{y} + c\right)$$

وبحل المعادلة 3 التي مرت معنا سابقاً نحصل على الصيغة التالية :

Z تشمل المتحولين x و y

$$\star \quad \boxed{\frac{\partial \ln \mu}{\partial Z} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q\frac{\partial Z}{\partial x} - P\frac{\partial Z}{\partial y}} = H(Z)}$$ حفظ

وعلى سبيل المثال لنبحث الحالات التالية :

P إذا كانت μ هي دالة في x فقط فإن

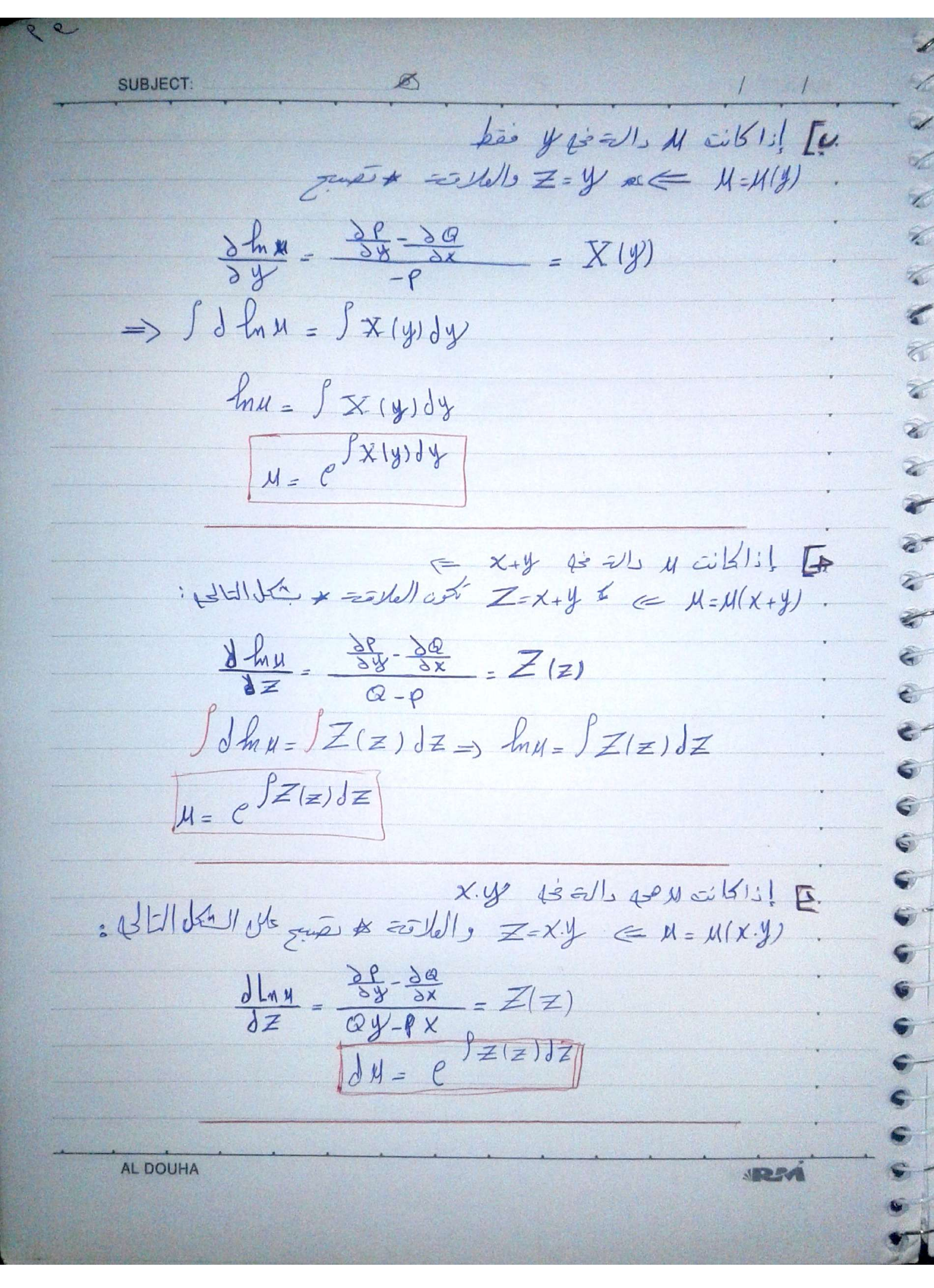
$Z = x$ عندئذٍ العلاقة ★ تكتب على شكل التالي

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q - P\underbrace{\frac{\partial x}{\partial y}}_{\text{يساوي الصفر}}} = X(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln \mu = \int X(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\ln \mu = \int X(x)\,dx$$

$$\boxed{\mu = e^{\int X(x)\,dx}}$$



ب] إذا كانت μ دالة في y فقط

$\mu=\mu(y) \Leftarrow$ $Z=y$ والعلاقة * تصبح

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = X(y)$$

$$\Rightarrow \int d \ln \mu = \int X(y)\,dy$$

$$\ln \mu = \int X(y)\,dy$$

$$\boxed{\mu = e^{\int X(y)\,dy}}$$

ج] إذا كانت μ دالة في $x+y$ $\Leftarrow$

$\mu=\mu(x+y) \Leftarrow$ $Z=x+y$ تكون العلاقة * بالشكل التالي:

$$\frac{d \ln \mu}{dZ} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q-P} = Z(z)$$

$$\int d \ln \mu = \int Z(z)\,dZ \Rightarrow \ln \mu = \int Z(z)\,dZ$$

$$\boxed{\mu = e^{\int Z(z)\,dZ}}$$

د] إذا كانت μ دالة في $x.y$

$\mu = \mu(x.y) \Leftarrow$ $Z=x.y$ والعلاقة * تصبح على الشكل التالي:

$$\frac{d \ln \mu}{dZ} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Qy-Px} = Z(z)$$

$$\boxed{d\mu = e^{\int Z(z)\,dZ}}$$
